Шифр: 9-02

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020
Ленинградская область

Район Киришский

Школа МОУ „Киришский лицей"

Класс 9

ФИО Панов Андрейя Вячеславович.

1	2	3	4	5	Σ
7	0	5	0	0	12

9-08

~~#~~ №1. Решение: Да может, приведу пример.

1ая минута: делит кучу из 10 конфет на две в каждой по пять
2ая минута: объединяет кучи ~~1~~ и из 1 и 9 конфет
3ая минута: делит полученую во 2ой минуте кучу на две в каждой по пять
4ая минута: объединяет кучи из 2 и 8 конфет
5ая минута: делит кучу из ~~второй~~ четвертой минуты на две в каждой по пять
6ая минута: объединяет кучи из 3 и 7 конфет
7ая минута: делит кучу из шестой минуты на две в каждой по пять
8ая минута: объединяет кучи из 4 и 6 конфет
9ая минута: делит кучу из 8ой минуты на две в каждой по пять.
Таким образом на столе 11 куч в каждой по 5 конфет

Ответ: да, может.

№2. ~~Оценка~~
~~Пример: 101 число~~
~~0, 10, 20, 30, ..., 1000 есть все целые числа делящиеся в данной последовательности~~
~~Пример: 201 число~~ в данной последовательности есть все
~~-1000, 990, ..., 990, 100~~ целые ~~числа~~ делящееся на 10 модуль которые не превосходит
1000.
~~$(-1000)^2+(-990)^2+(-980)^2 = (1000^2+990^2+980^2 = 990^2+(990+10)^2+(990-10)^2 = 3\cdot 990^2+2\cdot 10^2 = 2940500 < 3000000$~~

~~Оценка:~~

лист 1

*2. Пример: 201 число.

$-1000, -990, \ldots, 990, 1000$ все числа делящиеся нацело на 10 и по модулю ~~меньш~~ не больше 1000

$(-1000)^2+(-990)^2+(-980^2) = 1000^2+980^2+990^2 = 990^2+(990-10)^2+(990+10)^2 = 3\cdot990^2+2\cdot10^2 =$

$= 2940300 < 3000000$

Оценка: Пусть есть 202 числа, тогда т.к разность между любыми двумя хотя бы 10, то отсортировав числа по возрастанию заметим что минимальное меньше максимального хотя бы на 2010. Для максимального по модулю числа можно сказать что ~~оно меньш~~ его модуль < 1800, т.к $1800 > \sqrt{3000000}$.

Обозначим ~~како~~ x_{max} как наибольшее по модулю число, тогда пусть x_{max-2} число тогоже знака, ~~такое~~ что есть только два числа этого знака по модулю больше его, значит

$|x_{max-2}|^2+(|x_{max-2}|+10)^2+(|x_{max-2}|+20)^2 < 3000000$

$3|x_{max-2}|^2+60|x_{max-2}|+500 < 3000000$

$|x_{max-2}|^2+20|x_{max-2}| - 999833\frac{1}{3} < 0$

$|x_{max-2}| < 990$, тогда получим что $|x_{max}|$ в случае разности 10 ~~max~~ меньше 1010. ~~Разность между наибольшим и наимен~~ ~~шим x делить на~~. При разности 10 между любыми соседними числами

ответ $n \leq 1009\cdot2 // 10$ где // - целочисленное деление с

$n \leq 201$ округлением в меньшую сторону.

При разности больше 10 между какими-то соседними числами найдём среднюю разность $\frac{|x_{min}-x_{max}|}{202}$ где $x_{max}-x_{min} < 3600$

$n < 3600 // \frac{3600}{202}$

$n < 202$

$n \leq 201$

таким образом всего выписано не более 201 числа.

Ответ: при $n=201$

№3. Выигрывает ~~Дима~~ Коля.

Коле для победы необходимо сделать заповедник, рассмотрим ~~его~~ возможные заповедники:  заповедник такая клетка в которую Дима никогда не поставит доминошку.

Покрасим доску шахматной раскраской.

За ход Коля ~~убирает~~ крестит клетку одного из цветов, Дима накрывает сразу двух. Стратегия ~~Димы~~ Коля ~~поставить свои доминошки в углы доски~~ крестить и следить за возможными заповедниками. Если образуется хотябы один заповедник проигрывает Дима. Стоит заметить что заповедник может оброзоваться не только в углу или на краю доски. Задача ~~Димы с~~ ~~Дима~~ Коля ~~ставит~~ крестит свои ~~доминошки~~ клетки ~~так чтобы~~ рядом с каждым ~~крестом~~ доминошками ~~было нечётное число клеток~~ без домино или ~~без крестов.~~

За первые 16 ходов Дима может ненакрыть ни одного креста, далее каждым ходом Коля будет "крестить" ещё одну клетку всего "крещёных" на момент 18 ходов будет 16 до ~~значит на 17 гарантировано~~ образуется пара ~~если Дима следовал стратегии по блокированию заповедников~~ Дима ~~сможет~~ Заповедник образуется в конце когда Дима ~~закрыти~~ ставит 31 доминошку и 32 поставить не может.

Ответ: Коля.

Шифр: 2-9-22

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020
Ленинградская область

Район Киришский

Школа МОУ „Киришский лицей"

Класс 9

ФИО Попов Андрей Вячеславович

6	7	8	9	10	Σ
7	7	3	0	0	17

2-9-22

№7. Пример: 1010 хамелеонов зелёного цвета изначально

Начало $\underbrace{\text{зкзкзк....зкз}}_{2019}$ зелёные и коричневые чередуются, начиная с зелёного. Вначале 1010 зелёных 1009 коричневых.

Рассмотрим что они говорят и делают, для определённости пусть коричневые говорят число равное разности кол-ва зелёных и 1009

1-й: 1010 - правда

2-й: 1 - ложь, перекрасился

3-й: 1011 - правда

⋮

2018-й: 1009 - ложь, перекрасился

2019-й: 2019 - правда

Пример работает.

Оценка: ∃ есть хотябы 1011 зелёных хамелионов вначале, т.к всего 2019, то коричневых не более 1008, тогда тогда т.к их 1010 > 1008, то найдутся два таких хамелиона, которые стоят рядом и зелёные с самого начала, пусть их номера n_i и n_{i+1}

Рассмотрим их ответы: и остаётся зелёным

n_i говорит некоторое число и остаётся зелёным что и n_i, т.к число не изменилось. n_{i+1} говорит тоже самое число что и n_i,

Всего по условию было получено 2019 разных ответов от 2019 хамелионов, значит нет таких двух сказавших одно и тоже число, но если зелёных изначально хотябы 1011, такие найдутся, противоречие.

Значит всего не более 1010 зелёных хамелионов вначале.

Ответ: 1010.

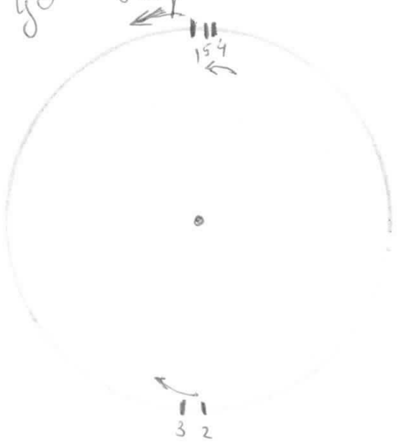
2-9-22

№ 9.6. ∃ скорость Пети x, тогда Мишина $1,02x$, пусть весь круг 1.

1) Миша пробежит $\frac{1}{2}$ круга за $\frac{25}{51}x$, Петя за это же время пробежит $\frac{25}{51}$ круга, тогда Миша добежав до середины разворачивается и бежит на встречу Пете - первая встреча

2) Теперь они бегут навстречу друг другу. Пока Миша бежит от точки разворота до места ~~стра~~ старта ~~П~~ Петя бежит к тому же месту. В момент когда Миша вернулся на старт Петя пробежал $\frac{50}{51}$ от всей дистанции, значит Миша продолжает бежать к нему навстречу, встречается с ним, разворачивается, тем самым догоняет ~~А~~ Петю и они финишируют.

Миша мог разворачиваться, т.к до первого разворота он пробежал $\frac{1}{2}$ круга, а до второго больше чем $\frac{1}{2}$ круга



1- точка начала
2- точка первого разворота
3- первая встреча
4- вторая встреча, второй разворот, ~~третья в~~
5- третья встреча

Стоит заметить, что вторая и третья встреча могут произойти в соседних точках, ~~на~~ но из условия Миша не тратит время на разворот, поэтому они должны совпасть

~~Ответ:~~

№9. ∃ у нас получился „хороший" многоугольник.

1) тогда число его вершин хотя бы 5, т.к при 3 параллельны сторон не будет (это треугольник)

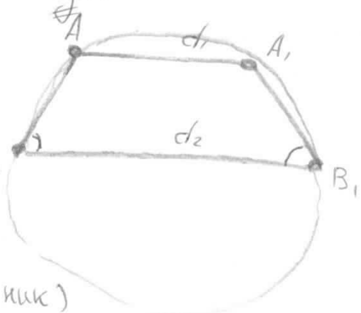
2) рассмотрим эти две параллельные стороны:

а) они образованы двумя диагоналями

б) они образованы диагональю и стороной

в) они образованы двумя сторонами

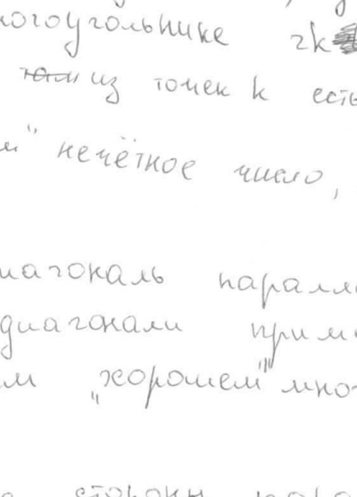
а) если в правильном многоугольнике две диагонали параллельны, то ~~число~~ кол-во его вершин ⋮2, ~~тогда~~ посмотрим на две такие диагонали d_1 и d_2 параллельные стороны.



Заметим что для выполнения условия с параллельностью дуги AB и A_1B_1 (дуги окружности описывающей правильный многоугольник) должны содержать одинаковое число вершин многоугольника, пусть это будет число k, тогда в нашем „хорошем" многоугольнике 2k вершин, ~~минус~~ возможно минус ещё „чётное" число (одинаковое на AB и A_1B_1) если из точек k есть многоугольники, но по условию вершин в „хорошем" нечётное число, это противоречие.

б) если в правильном многоугольнике диагональ параллельна стороне, то аналогично док-ву про две диагонали примем за AA_1 сторону и получим что в нашем „хорошем" многоугольник ~~2k~~ чётное число вершин, противоречие.

в) если в правильном многоугольнике две стороны параллельны то кол-во его вершин ⋮2, рассмотрим такие ~~вершины~~ стороны; они лежат напротив друг друга, стоит заметить что у двух соседних многоугольников есть две общие точки.



∃ пусть в многоугольнике (хорошем) со сторонами AA_1 и BB_1 2k+1 вершина, т.к AA_1 и BB_1 лежат напротив, то на дугах AB и A_1B_1 одинаковое число вершин ⇒ одинаковое число многоугольников с 2k+1 вершиной в каждой, пусть их t, тогда всего верши

продолжение на листе 4

в начальном правильном многоугольнике $(2t+1)(2k+1)-2m$

$2t+1$ - нечётное

$2k+1$ - нечётное

$2m$ - вершины посчитанные дважды при подсчёте (из-за лежачащих по стороне мн-ков ~~вершин~~) $2m$ - чётное.

н.ч • н.ч − ч = н.ч, но кол-во вершин в правильном многоугольнике с двумя параллельными сторонами чётное число, противоречие

Таким образом получиться „хорошего" многоугольника не могло ~~так как~~ мы опровергли начальное предположение.

Ответ: не может.

№ 8.10. Д-во:

т.к все $x_i > 0$,

то все знаменатели дробей положительные, т.к

„+" + „+" + „+" = „+"

~~дом~~ обозначим за a - произведение всех знаменателей

a_1 - всех кроме первого, ..., a_9 - всех кроме девятого.

Умножим нер-во на a

$$a_1(x_1-x_3)+\ldots+a_8(x_8-x_1)+a_9(x_9-x_2)\geq 0$$

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_8x_8+a_9x_9\geq a_1x_3+\ldots+a_8x_1+a_9x_2$$

Заметим что при максимальном X максимально и a, тогда ~~все~~ воспользуемся тем что при

$a_i, b_i, a_{max}, a_{min}, b_{max}, b_{min} > 0$

$a_{max} \geq a_{min}$

$b_{max} \geq b_{min}$

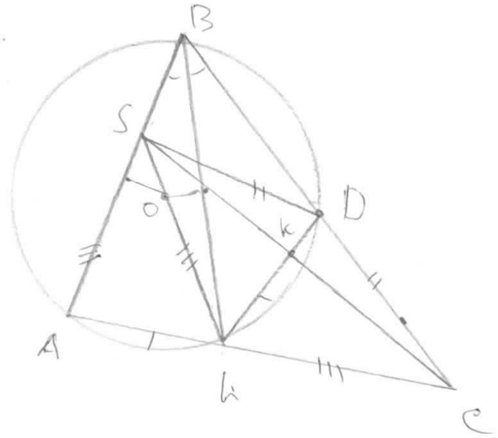
$$a_{max}b_{max}+a_{min}b_{min}+a_ib_i\geq a_{max}b_i+b_{max}a_{min}+b_{min}a_i$$

случайный, неотсортированный порядок где максимальное не на максимальное, среднее не на среднее и т.д.

значит наше ~~это~~ нер-во верно, ч.т.д.

лист № 4.

№8.



Дано: $\triangle ABC$, BL - биссектриса,
O - цент окр описанной около $\triangle ABC$ с радиусом R
окр $(O; R) \cap BC = D$
$CK \perp DL$, $CK = CS$, ~~SS~~ SK $\perp DL$
Найти: $\angle ABC$
Решение: 1) т.к BL - биссектриса и угол ABD - вписанный, то $AL = LD$
2) Доп построение SL и SD
3) $\triangle SDS$ и $\triangle SLC$ - р/б т.к. DK и LK - высота и медиана $\Rightarrow$
$\Rightarrow SL = CL$, $SD = CD$, $\angle SLD = \angle DLC$, $\angle LSD = \angle LCD$, $\angle SDL = \angle CDL$.
4) $\triangle ALS = \triangle LSD$ по трём сторонам (следует из 1, 3 и k) и равен $\triangle LCD$, тогда
$\angle ALS = \angle SLD = \angle DLC$ и в сумме они дают $180°$, тогда каждый из них равен $60°$
5) Рассмотрим $\triangle SBD$ $\angle BCD = 180° - 2\angle ASL$, $\angle BDS = 180° - 2\angle SDL \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle$ ~~BC~~ $SBD = \angle ABC = 2(\angle ASL + \angle SDL) - 180°$, заметим что
$\angle ASL + \angle SDL = 180° - \angle SLA$ (из равенства треугольников)
$\angle ASL + \angle SDL = 180° - 60° = 120°$, тогда $\angle ABC = 60° = 2 \cdot (120°) - 180° = 240° - 180°$

Ответ: угол ABC может ~~бу~~ быть равен только углу $60°$